Análisis

1. Fija $c > 0$ y $a_1 > 0$, y define $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$. Demuestra la convergencia para todo valor inicial. Determina el límite y cuándo la sucesión es creciente, decreciente o constante.

2. Sean $0 < a_1 < 1$ y $a_{n+1} = a_n(1 - a_n/2)$. Demuestra que $a_n \downarrow 0$ y que $na_n \to 2$.

3. Para una sucesión real acotada (a_n), demuestra

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

   Da un ejemplo en el que las dos desigualdades exteriores sean estrictas.

4. Para sucesiones reales acotadas (a_n) y (b_n), demuestra

$$\limsup_{n\to\infty}(a_n + b_n) \leq \limsup_{n\to\infty} a_n + \limsup_{n\to\infty} b_n.$$

   Determina si necesariamente hay igualdad y justifica tu respuesta.

5. Supón que $a_n \geq 0$ y

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \longrightarrow 0.$$

   ¿Se sigue que $a_n \to 0$? Da un contraejemplo si es necesario. Demuestra que la conclusión sí es válida si (a_n) también es monótona.

6. Para todo $q \in \mathbb{R}$, determina si

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^q}$$

   converge. Justifica todos los casos, incluido $q = 1$.

7. Determina si la convergencia de una serie real $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ implica la convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$. Si la implicación es falsa, construye un contraejemplo y verifica ambas afirmaciones sobre las series correspondientes.

8. Para $\alpha \in \mathbb{R}$, define $f_\alpha(0) = 0$ y

$$f_\alpha(x) = |x|^\alpha \sin(1/x), \qquad x \neq 0.$$

   Determina exactamente cuándo f_α es continua en cero y cuándo es derivable allí. Justifica también los casos en que estas propiedades fallan.

9. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, con $a < b$. Supón que $g([a, b]) = [m, M]$ y $f([a, b]) \subseteq [m, M]$. Demuestra que $f(c) = g(c)$ para algún $c \in [a, b]$.

10. Demuestra que una función continua e inyectiva $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona.

11. Demuestra que el producto de dos funciones reales acotadas y uniformemente continuas en un mismo conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es uniformemente continuo en A. Determina si la conclusión sigue siendo válida al suprimir la hipótesis de acotación.

12. Demuestra que $f(x) = \sin(x^2)$ no es uniformemente continua en $\mathbb{R}$.

13. Demuestra que una función uniformemente continua transforma sucesiones de Cauchy en sucesiones de Cauchy. Usa este resultado para demostrar que $x \mapsto \sin(1/x)$ no es uniformemente continua en $(0, 1)$.

14. Sea $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ continua y supón que $\lim_{x\to\infty} f(x)$ es finito. Demuestra que f es uniformemente continua en $[0, \infty)$.

15. Supón que f es integrable en el sentido de Riemann en $[a, b]$ y continua en $x_0 \in (a, b)$. Demuestra directamente, a partir de la definición de derivada, que

$$G(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

es derivable en x_0 y que $G'(x_0) = f(x_0)$.

16. Para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, define

$$F(x) = \int_0^x (x - t)f(t)\,dt.$$

Demuestra que $F'' = f$ y que $F(0) = F'(0) = 0$. Deduce que esta es la única función dos veces derivable que cumple estas condiciones.

17. Determina para cuáles $s \in \mathbb{R}$ converge la integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty t^{s-1}e^{-t}\,dt.$$

Para $s > 0$, demuestra $\Gamma(s + 1) = s\Gamma(s)$, justificando los términos de borde. Deduce $\Gamma(n) = (n - 1)!$ para todo entero $n \geq 1$ y calcula

$$\int_0^\infty t^{s-1}e^{-\lambda t}\,dt, \qquad s > 0, \quad \lambda > 0.$$

18. Para $t > 0$, demuestra

$$\frac{t}{1 + t^2}e^{-t^2/2} \leq \int_t^\infty e^{-x^2/2}\,dx \leq \frac{1}{t}e^{-t^2/2}.$$

Deduce que

$$\lim_{t\to\infty} te^{t^2/2} \int_t^\infty e^{-x^2/2}\,dx = 1.$$

19. Determina si

$$G = \{(x, 1/x) : x > 0\}$$

es cerrado como subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Justifica rigurosamente tu respuesta.

20. Define $f(0, 0) = 0$ y

$$f(x, y) = \frac{x^2y}{x^4 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0, 0).$$

Demuestra que el límite a lo largo de toda recta que pasa por el origen es cero, pero que el límite conjunto no existe.

21. Si $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ es continua y $K \subseteq \mathbb{R}$ es cerrado, demuestra que $f^{-1}(K)$ es cerrado. Da un ejemplo que muestre que la conclusión puede fallar si f no es continua.

22. Demuestra que una función real continua en un subconjunto no vacío, cerrado y acotado de $\mathbb{R}^d$ alcanza su mínimo y su máximo. Da un ejemplo que muestre que no basta con que el dominio sea acotado.

23. Calcula
$$\iint_Q x^2 y^2 \, dx \, dy, \qquad Q = \{(x, y) : x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\}.$$
Justifica el cambio de variables y los límites de integración.

24. Calcula
$$\iint_{x^2/4 + y^2/9 \leq 1} e^{x^2/4 + y^2/9} \, dx \, dy.$$
Explica los cambios de variables empleados y sus jacobianos.

25. Para $a > 0$, demuestra la convergencia y calcula
$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-a(x^2+y^2)} \, dx \, dy.$$
Deduce el valor de
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} \, dx$$
y justifica el paso de la integral unidimensional a la integral doble.

26. Encuentra el máximo y el mínimo globales de xy sujeto a $x^2 + 4y^2 = 4$. Identifica todos los casos de igualdad y justifica por qué se alcanzan los extremos.

27. Minimiza $x^2 + y^2 + z^2$ sujeto a $x + 2y - z = 3$. Resuelve mediante multiplicadores de Lagrange y, de manera independiente, mediante Cauchy-Schwarz o una proyección ortogonal. Justifica la unicidad del minimizador.

28. Sean $p_i > 0$ y $\sum_{i=1}^n p_i = 1$. Encuentra el mínimo de
$$\sum_{i=1}^n p_i x_i$$
sobre los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tales que
$$\sum_{i=1}^n e^{-x_i} = 1.$$
Encuentra todos los minimizadores y demuestra que el mínimo es global.

29. En el problema anterior, supón $n \geq 2$, $p_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ y que al menos un $p_i = 0$. Determina el ínfimo y si lo alcanza algún vector $x \in \mathbb{R}^n$. Usa la convención $0 \log 0 = 0$ al expresar la respuesta.

30. Fija $\beta > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Para

$$f_n(x) = n^\alpha x^\beta (1-x)^n, \qquad x \in [0,1],$$

encuentra su máximo y demuestra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|f_n\|_\infty}{n^{\alpha-\beta}} = \beta^\beta e^{-\beta}, \qquad \|f_n\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x)|.$$

Determina el límite puntual y la condición exacta para la convergencia uniforme.

31. Demuestra que el límite uniforme de funciones reales continuas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ es continuo en A. Da una sucesión que muestre que la convergencia puntual no basta.

32. Para

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^n, \qquad x \in [0,1],$$

demuestra que $f_n(x) \to 0$ en todo punto y calcula $\int_0^1 f_n(x)\,dx$. Compara el límite de estas integrales con la integral del límite puntual y determina si la convergencia es uniforme.

Álgebra lineal

33. Sean $v_1, \dots, v_m$ vectores de un espacio vectorial y define $w_j = v_1 + \cdots + v_j$. Demuestra que $(w_1, \dots, w_m)$ es linealmente independiente si y solo si $(v_1, \dots, v_m)$ lo es.

34. Sean $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$ independientes y $v_3 = v_1 + v_2$. Dados $u_1, u_2, u_3 \in \mathbb{R}^2$, encuentra la condición necesaria y suficiente para que exista una transformación lineal $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ con $T(v_i) = u_i$ para $i = 1, 2, 3$. Cuando existe, determina si es única y justifica tu respuesta.

35. Considera el sistema

$$x - z = a, \qquad my + 3z = b, \qquad 4x + y - mz = c.$$

Determina para cuáles $m \in \mathbb{R}$ tiene una solución única para todo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. Para cada valor excepcional de m, determina la condición exacta sobre (a, b, c) para que sea compatible y describe todas sus soluciones.

36. Si N es cuadrada y $N^k = 0$ para algún entero $k \geq 1$, demuestra que $I + N$ es invertible y da una fórmula finita para su inversa. Aplica el resultado para calcular la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

37. Las columnas de P forman la base $\mathcal{B}$ en coordenadas canónicas, y A es la matriz canónica de $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Demuestra

$$[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1} A P$$

y deduce que la traza y el determinante de la matriz de T no dependen de la base elegida.

38. Para una matriz real A de tamaño $n \times n$, demuestra la equivalencia entre: (a) A es invertible; (b) $\ker A = \{0\}$; (c) sus columnas forman una base de $\mathbb{R}^n$; (d) $Ax = b$ tiene exactamente una solución para todo $b \in \mathbb{R}^n$.

39. Sean A, D matrices invertibles de tamaño $n \times n$ y C una matriz cualquiera del mismo tamaño. Demuestra que

$$M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

es invertible y calcula M^{-1}. No supongas conmutatividad entre los bloques. Verifica ambos productos matriciales.

40. Para matrices cuadradas A, D y un bloque C de tamaño compatible, demuestra

$$\det \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix} = \det(A) \det(D).$$

La demostración debe incluir el caso en que alguno de los bloques diagonales sea singular.

41. Para una matriz compleja A que cumple $A^* = A$, donde $A^* = \overline{A}^T$, demuestra mediante identidades de determinantes que $\det A$ es real. Determina si debe ser no negativo. Explica también si la condición $A^T = A$ basta para garantizar que el determinante sea real, y da contraejemplos cuando corresponda.

42. Para matrices cuadradas A, B del mismo tamaño, demuestra que $AB = I$ implica $BA = I$. Da matrices reales rectangulares que muestren que la afirmación falla sin la hipótesis de ser cuadradas, usando identidades de los tamaños apropiados.

43. Demuestra que los vectores propios asociados a valores propios distintos entre sí son linealmente independientes. Deduce que una matriz real $n \times n$ con n valores propios reales distintos es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$.

44. Supón $n \geq 2$ y que todas las filas y todas las columnas de $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ suman r. Demuestra que

$$H = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \right\}$$

es invariante bajo A. Usando

$$\mathbb{R}^n = \operatorname{span}\{(1, \ldots, 1)\} \oplus H,$$

demuestra $\det A = r \det(A|_H)$ y caracteriza la invertibilidad de A.

45. Da una matriz real 3×3 invertible y otra singular cuyas filas y columnas sumen 3. Determina los valores propios de tus ejemplos.

46. Para

$$R = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

determina los valores propios y decide si es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y sobre $\mathbb{C}$. Encuentra una diagonalización compleja si existe.

47. Si A es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y p es un polinomio real, demuestra que $p(A)$ es diagonalizable sobre $\mathbb{R}$ y describe sus valores propios. Determina si la diagonalizabilidad de $p(A)$ implica la de A y justifica tu respuesta.

48. Encuentra la proyección ortogonal de $b = (2, 0, 1)$ sobre

$$U = \operatorname{span}\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}.$$

Explica por qué, para estos generadores, en general es incorrecto sumar las proyecciones individuales sobre las dos rectas.

49. Para

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

encuentra el minimizador de $\|Ax - b\|_2^2$ sobre $x \in \mathbb{R}^2$. Demuestra su existencia y unicidad, y verifica que el residuo es ortogonal a $\operatorname{im} A$.

50. Para una matriz real simétrica A, demuestra que $x^T Ax \geq 0$ para todo x si y solo si todos los valores propios de A son no negativos. Enuncia y demuestra el resultado análogo para la definitud positiva.

51. Demuestra que la matriz real

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

es semidefinida positiva si y solo si $a \geq 0$, $c \geq 0$ y $ac - b^2 \geq 0$. Incluye los casos $a = 0$ o $c = 0$.

52. Para cualquier matriz real cuadrada A, demuestra

$$x^T Ax = \frac{1}{2} x^T (A + A^T) x.$$

Si $x^T Ax \geq 0$ para todo x, ¿debe ser simétrica A? ¿Deben ser reales y no negativos todos sus valores propios? Da contraejemplos cuando corresponda y enuncia la condición necesaria y suficiente sobre su parte simétrica.

53. Para $u \in \mathbb{R}^n$ no nulo, sea

$$P = I - \frac{uu^T}{u^T u}.$$

Demuestra $P^T = P$ y $P^2 = P$. Encuentra su imagen, su núcleo y sus valores propios. Demuestra que P representa una proyección ortogonal y que $x^T Px \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.